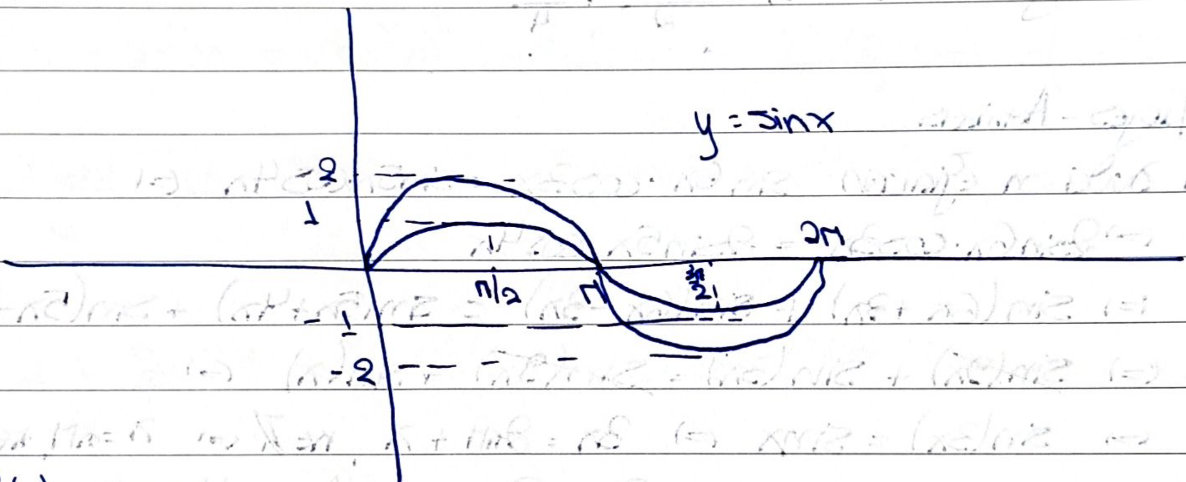
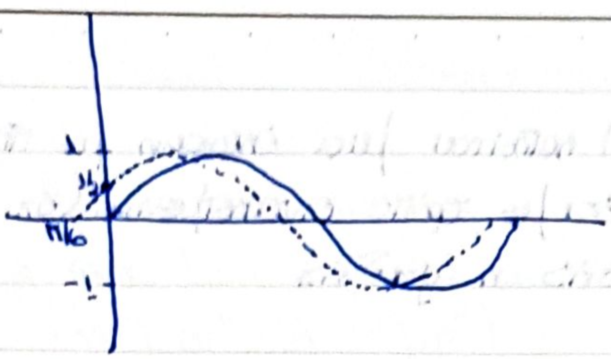
09-10-2018.



f(x) = sin(x)

g(x) = 2 sinx



$f(x) = \sin x$

$h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από παράλληλη μεταφορά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f προς τ' αριστερά κατά $\frac{\pi}{6}$ μονάδες.

→ $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από παράλληλη μετατόπιση της γρ. παράστασης της f προς τα δεξιά κατά $\frac{\pi}{6}$ μονάδες.

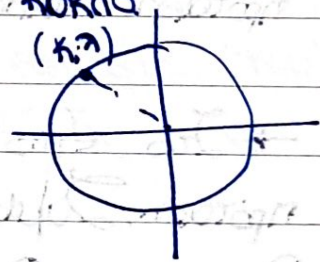
→ Η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sin x + b\cos x$, $\alpha, b \neq 0$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\alpha^2 + b^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\cos x\right)$

θέτω $\kappa = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}$, $\lambda = \frac{b}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}$

έχουμε $\kappa^2 + \lambda^2 = 1$.

Άρα το σημείο (κ, λ) βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο



άρα υπάρχει γωνία φ ώστε $\cos\varphi = \kappa$, και $\sin\varphi = \lambda$.
(τόξο)

Έτσι $f(x) = \sqrt{\alpha^2 + b^2}\,(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x)$

$f(x) = \sqrt{\alpha^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$

→ Λογικές Προτάσεις

· Λογική πρόταση (ή απλά πρόταση) καλείται μια έκφραση με πλήρες νόημα για την οποία είναι σαφές ότι με τρόπο αντικειμενικό (όχι υποκειμενικό) να χαρακτηριστεί αληθής ή ψευδής

Παραδείγματα

α) Ο Νεϊμάρ είναι ο καλύτερος ζωγράφος

β) Η Καβάλα είναι ωραία πόλη.

Ενώ σύμφωνα με το συντακτικό της ελληνικής γλώσσας αποτελούν προτάσεις, δεν είναι λογικές προτάσεις.

γ) Ο αριθμός 12 είναι πολλαπλάσιο του 3. (αληθής)

δ) Ο αριθμός 14 είναι πολλαπλάσιο του 5. (ψευδής)

ε) Το μουντιάλ του 2018 το κατέκτησε η Γαλλία. (αληθής)

Οι γ, δ, ε είναι λογικές προτάσεις.

Οι γ, δ έχουν μαθηματικό περιεχόμενο, ενώ η ε όχι. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για προτάσεις με μαθηματικό περιεχόμενο.

Οι χαρακτηρισμοί αληθής (Συμβ. Α) που αποδίδουμε σε κάθε
ψευδής (Συμβ. Ψ)
λογική πρόταση ονομάζονται τιμές αλήθειας της πρότασης.

Η ανάθεση της τιμής Α (αλήθεια) ή Ψ (ψευδής) σε μια πρόταση καλείται αποτίμηση της πρότασης

→ Στο εξής θα λέμε απλά πρόταση και θα εννοούμε λογική πρόταση. Συμβολίζουμε συνήθως τις προτάσεις με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, συνήθως p, q, r, s, t.

Λογικοί Σύνδεσμοι - Κατασκευή νέων προτάσεων από παλιές

→ Άρνηση της πρότασης

Αν p είναι μία πρόταση με την προσθήκη του συνδέσμου "όχι" (ή "δεν" ή "μη")

Προκύπτει η πρόταση "όχι p" η οποία καλείται άρνηση της p και θα συμβολίζεται με $\sim p$ (ή με $\neg p$)

· Για παράδειγμα από τις προτάσεις

p: ο αριθμός 3 είναι περιττός

q: ο αριθμός 6 είναι πρώτος

προκύπτουν οι προτάσεις

$\sim p$: ο αριθμός 3 δεν είναι περιττός

$\sim q$: ο αριθμός 6 δεν είναι πρώτος

Ο επόμενος πίνακας αληθείας δείχνει την αποτίμηση της πρότασης $\sim p$ συναρτήσει της αποτίμησης της πρότασης p.

p	$\sim p$
Α	Ψ
Ψ	Α

Άρα ο πίνακας δείχνει ότι όταν η p είναι αληθής τότε η $\sim p$ είναι ψευδής και όταν η p είναι ψευδής η $\sim p$ είναι αληθής.

→ Σύζευξη δύο προτάσεων

Αν p, q είναι δύο προτάσεις με την προσθήκη του συνδέσμου "και" προκύπτει η πρόταση "p και q" η οποία θα συμβολίζεται $p \wedge q$ (ή με p & q)

· Για παράδειγμα αν έχουμε τις προτάσεις:

p: "Ο αριθμός 7 είναι άρτιος"

q: "ο αριθμός 20 είναι άρτιος"
Η σύζευξη τους είναι η πρόταση p^q. Ο αριθμός 7 είναι άρτιος και ο αριθμός 20 είναι άρτιος

Ο πίνακας αλήθειας για την πρόταση p^q είναι ο εξής:

p	q	p^q
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Ο πίνακας δείχνει ότι η p^q θεωρείται αληθής μόνο στην περίπτωση που οι p, q να είναι και οι δύο αληθείς.

→ Εγκλειστική διάζευξη (ή απλά διάζευξη δύο προτάσεων)
Από δύο προτάσεις p, q με χρήση του συνδέσμου "ή" προκύπτει η πρόταση "p ή q", και συμβολίζεται p∨q.

Πίνακας αλήθειας

p	q	p∨q
A	A	A
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Ο πίνακας δείχνει ότι η p∨q θεωρείται ψευδής μόνο στην περίπτωση που οι αρχικές p, q είναι και οι δύο ψευδής.

→ Συνεπαγωγή

Αν p,q είναι δύο προτάσεις, προκύπτει η νέα πρόταση "Αν p τότε q" ή "p συνεπάγεται q" και συμβολίζεται $p \Rightarrow q$ ($imp \rightarrow q$).

Δυο ακόμη εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για τη συνεπαγωγή είναι οι εξής: "Η p είναι ικανή συνθήκη για την q".
"Η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p".

Πίνακας αλήθειας:

p	q	$p \Rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Στην συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$:
Η p ονομάζεται υπόθεση της συνεπαγωγής και η q συμπέρασμα της συνεπαγωγής

Σημειώνουμε ότι: Η $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής.

→ Ισοδυναμία προτάσεων

Αν p,q είναι δύο προτάσεις προκύπτει η νέα πρόταση "p αν και μόνο αν q" ή αλλιώς "p τότε και μόνο τότε q" ή αλλιώς "η p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την q" ή αλλιώς "η p συνεπάγεται την q" ή αλλιώς "η πρόταση p είναι ισοδύναμη της q".

Η πρόταση αυτή συμβολίζεται $p \Leftrightarrow q$.

Ο πίνακας αλήθειας είναι ο εξής:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Ο πίνακας αυτός δείχνει ότι η $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής μόνο όταν οι p,q είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς.

→ Αποκλειστική διάζευξη προτάσεων

Από δύο προτάσεις p,q προκύπτει η πρόταση: "ή μόνο p ή μόνο q" και συμβολίζεται $p \veebar q$.

Πίνακας αλήθειας:

p	q	$p \veebar q$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Αν έχουμε κάποιες απλές λογικές προτάσεις p, q, r... με χρήση λογικών συνδέσμων μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετες προτάσεις.

Π.χ. i) $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim(p \vee r))$

ii) $(p \vee r) \Rightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$

• Πίνακας αλήθειας για (ii):

Εμπλέκονται τρεις απλές προτάσεις οι p, q, r άρα θα έχει $2^3 = 8$ γραμμές.

p	q	r	$p \vee r$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$(p \vee r) \Rightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$
Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Ορισμός: Μια σύνθετη πρόταση που κατασκευάζεται από μία ή περισσότερες απλές λογικές προτάσεις p, q, r... λέγεται ταυτολογία αν είναι αληθής για κάθε αποτίμηση των προτάσεων που περιέχονται σε αυτήν.

Ορισμός: Δύο προτάσεις r, t λέγονται ισοδύναμες αν η πρόταση $r \Leftrightarrow t$ είναι ταυτολογία. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι r, t έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας.

Παραδείγματα ταυτολογιών:

1) $p \Leftrightarrow (p \wedge p)$

2) $p \Leftrightarrow (p \vee p)$

3) ⓐ $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$

ⓑ $p \vee (\sim p)$

4) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

5) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

Κανόνες του De Morgan

6) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim((\sim p) \vee (\sim q))$

7) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim((\sim p) \wedge (\sim q))$

8) ⓐ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge (\sim q))$ ← απαγωγή σε άτοπο

ⓑ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$ ← αντιθετοαντιστροφή

ⓒ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$

9) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim(p \wedge (\sim q))) \wedge (\sim(q \wedge (\sim p)))$

10) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

11) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

12) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ← Επιμεριστική της σύζευξης ως προς τη διάζευξη

13) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ← Επιμεριστική της διάζευξης ως προς τη σύζευξη.

Αποδείξεις

3β

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α

ζ

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim((\sim p) \wedge (\sim q))$	$p \vee q \Leftrightarrow \sim((\sim p) \wedge (\sim q))$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α

ιβ

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

9)

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$\sim q$	$p\wedge(\sim q)$	$\sim(p\wedge(\sim q))$	$\sim p$	$q\wedge(\sim p)$	$\sim(q\wedge(\sim p))$	$(\sim(p\wedge(\sim q)))\wedge(\sim(q\wedge(\sim p)))$	[illegible]
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α

11-10-2018.

Σημείωση: Το γεγονός ότι οι προτάσεις $p\wedge(q\wedge r)$ και $(p\wedge q)\wedge r$ είναι ισοδύναμες. Μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τον (κοινό) συμβολισμό $p\wedge q\wedge r$ παραλείποντας τις παρενθέσεις.

Ομοίως $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge p_4=((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge p_4$

Γενικότερα $p_1\wedge p_2\wedge\dots\wedge p_k=(((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge\dots\wedge p_{k-1})\wedge p_k$.

Η πρόταση αυτή είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που οι $p_1\dots p_k$ είναι όλες αληθείς.

Λογικές αποδείξεις:

Ορισμός. Αν $p_1\dots p_k, q$ είναι προτάσεις ώστε η πρόταση $(p_1\wedge p_2\wedge\dots p_k)\Rightarrow q$ να είναι ταυτολογία. Λέμε ότι έχουμε μια λογική απόδειξη με υποθέσεις τις $p_1\dots p_k$ και συμπέρασμα την q.

Σε αυτή την περίπτωση συμβολικά χρησιμοποιούμε το σχήμα

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ \hline q \end{array}$$